

9dci ĉj dj han ĉXgZVhĉ\ i j WhZfj ZcXZh

<F1 79 (&((

ĉYVc ĉhi ĉj iZ d[i XZcXZ"
8Vc\ \aig

d[HVcYdb Cj a ĉZi FZgb j iVi ĉdch

7aZmVcYZg9a[ide ' 8ĉj Va: ZW(N{Zc\ >j Vc\) i Vb i e ĉgd * i Zb ĉ Ndd +

: ZeiSd[C Vi] Zb Vi Xh" : b dgn J c kZghn (: ZeiSd[C Vi] Zb Vi Xh" J c kZghn 9daZ\ Z BdcYdc (: ZeiSd[C Vi] Zb Vi Xh" J c kZghn d[C X] \ Vc
: ZeiSd[C Vi] Zb Vi Xh" J c kZghn d[9Va[gdg: V Vi i Vc : 'Z\ d ' i X] dda[9db ej iVi ĉcVar XZcXZh' AdgV ĉhi ĉj iZ d[7YkVcXZY i j YZh

7WhigXi

f, ĉ > E, ĉH >-Hs-"LnL ĉ i E L HLT-L Lⁱ()", AL "pL L-n"p, N"pL , -nL%o%A%ĉfĴL-BL, N"pL N ĉ i(i+1) ĉ ĉj >-H E L L" L() := max_j Lⁱ() "- "ps%ĉ, ĉy E L L%o} >L "pL Lĉ.LB" LHĉ>ĴL%oNL¹() >-H L() E pL~ %ĉBp, %ĉ- Ĵ-ĉ\ ĉ} Ĵ>" ĉ>-H, } N, } > E, ĉH%ĉ psĉp Ĵ%oL>Bp, N"pL T" %o n ... %ĉĉL s-"LnL ĉ%ĉB" Ĵm } L%o L %ĉ E "p>" E[L¹()] m
ĉNn %ĉ%ĉ} Bĉ~" Ĵ >nL ĉ-"L" } %oNm >%ĉm "L-H%o, E>H%o-T-sĴ B -T" } s-n >B -ĴB"ĴL, N" sB -%ĉZ ĉ>p>} ĉL >-H 3.s, : L >%o %ĉ E "p>" E[L()] %ĉ%ĉ} ..., B", "pL s-ĉL %ĉn>} >NĴ-B, ~ -¹(n) ĉNn %ĉ%ĉ} Bĉ~" Ĵ >nL s-"L" } %oNm >%ĉm "L-H%o, E>H%o-T-sĴ

ĉiĉgdYj Xi ĉc

▪ &L" S_{m,n} HL~, "L "pL %ĉ", NE, ĉH%o E psĉp Ĵ%oL>Bp s-"LnL ĉ s-[n] := {1, 2, ..., n} Lĉ>B" Ĵm } L%o>-H E L ĉs "LnL ĉ", S_{m,n}>%ĉ} Ĵ %ĉ "L" } Ĵ">, ~ ĉ, ĉ Lĉ>} ...L
= 211323 S_{2,3}.

▪ &L" L_{m,n}ⁱ() HL~, "L "pL L-n"p, N"pL , -nL%o%A%ĉfĴL-BL, N , N"pL N ĉ i(i+1)(i+2) ĉ ĉj E psĉp E L B> >- i B ~ -Ĵ, Ĵ%Ĵ s-B'L>%ĉn %ĉA%ĉfĴL-BL
▪ ĉ %ĉA%ĉfĴL-BL %ĉB ~ -Ĵ, Ĵ%Ĵ s-B'L>%ĉn %ĉA%ĉfĴL-BL ĉN s %ĉ- i B ~ -Ĵ, Ĵ%Ĵ s-B'L>%ĉn %ĉA%ĉfĴL-BL N ĉ %ĉ} L i : L HLT-L

$$L_{m,n}(i) = \max_j L_{m,n}^i(j)$$

" , AL "pL L-n"p, N>, -nL%oB ~ -Ĵ, Ĵ%Ĵ s-B'L>%ĉn %ĉA%ĉfĴL-BL, N
▪ f, ĉ Lĉ>} ...L ĉN = 2341524315 "pL~
L_{2,5}() = L_{2,5}²() = 4 (2341524315)
>-H
L_{2,5}¹() = 3 (2341524315).

▪ : L %ĴHĴ L_{m,n}¹() >-H L_{m,n}() E pL~ %ĉBp, %ĉ- Ĵ-ĉ\ ĉ} Ĵ>" ĉ>-H, } N, } S_{m,n} >-H N BĴ%o ~ "pL ĉNĉ L E pL ĉ n %ĉ} ĴBp >nL" "p>- m

<ĉhi C V ĉ H Z h j ä

5pL, ĴL

> f, ĉ >-Ĵ s-"LnL ĉ m 1 L" 1, ..., m AL "pL ĴL, L%o NE_m(x) := $\prod_{k=0}^m \frac{x^k}{k!}$ "N S_{m,n} %ĉBp, %ĉ- Ĵ-ĉ\ ĉ} Ĵ>" ĉ>-H, } "pL ~ "pL Lĉ.LB" LH } >ĉĴ Ĵ} L-n"p, N> 1 B ~ -Ĵ, Ĵ%Ĵ s-B'L>%ĉn %ĉA%ĉfĴL-BL, N %ĉ %ĉĉL%o
$$\lim_n E[L_{m,n}^1()] = -1 - \sum_i^{-1} e^{-i}$$

A 5pL ĴL Lĉ%ĉ%ĉ~ >A%oĴ" L B ~ %ĉ~" > 0 %ĉBp "p>"
$$\lim_n E[L_{m,n}^1()] = m + 1 - \frac{1}{m+2} O(e^{-m})$$

f, ĉ, N3yL"ĉp

▪ &L" h_m(n) HL~, "L "pL ~Ĵ} AL ĉ, NE, ĉH%o S_{m,n} N ĉ E psĉp L_{m,n}¹() = n ĉ, ĉ, ~ >-H %Ĵ~ ĉ n>ĉL >- Lĉ>B" N ĉ} Ĵ >N ĉ h_m(n)

▪ : L ...Ĵn "ps%ĉ- "pL ĉHL~ "Ĵ
$$\lim_k E[L_{m,k}^1()] = \lim_k \sum_{n=1}^{\infty} \Pr[L_{m,k}^1() = n] = \lim_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_m(n)}{|S_{m,n}|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_m(n)}{|S_{m,n}|}$$

N , E LHAĴ%o} L B>L NĴ B } ..Ĵ">, ~ , , A">s-
$$\lim_n E[L_{m,n}^1()] = \frac{1}{m! x^m E_m(1/x)} \quad x \rightarrow -1$$

E pL ĴL %ĉpL f, ĉ} > &ĉ...>BL 5">-%ĉĴ} N ĉ N ĉ} > .., E L ĉ %ĉĉL%o x HLT-LH, ~ } , ~, } s-%ĉĴ (xⁿ) = xⁿ/n! fĉĉ...>-Hs-n fĉĴĴ>, ~ s", ...> > N>B, ~%ĉL, A">s- 5pL, ĴL } >

▪ f, ĉ 5pL, ĴL} A E L %ĉ E "p>"
$$\sum_{i=1}^{\infty} i^{-1} e^{-i} = -m - 2 + \frac{1}{m+2} + O(e^{-m})$$

N ĉ %ĉ} L ... %ĉĉL B ~%ĉ~" : L N , E "pL >...ĉ, >Bp Ĵ%ĉHAĴ", ~ ĴĴ >-H
Ĵp, %ĉ E pL ĴL >%ĉ s> Lĉĉ, -L~ > %ĉ} E >%ĉ%ĉ} >LH

8gZ[: ZhXgĉi ĉc d[C V ĉ H Z h j ä h

▪ E[L_{m,n}¹()] 5p%ĉĴ>- "Ĵ E >%ĉĉĴ Ĵ %ĴHĉHAĴ/ sB -%ĉZ ĉ>p>} ĉL >-H 3.s, ĉHĴL", s%ĉĉL >, ~%ĉs.f sp >BL" >s B>Hn>} L 5pLĴ...ĉ, ĉLH E[L_{m,n}¹()] m + Cm^{3/4} log m E pL~ n %ĉ%ĉ} Bĉ~" Ĵ >nL s-"L" } %oNm 5pLĴ B ~ĴB"ĴLH "p>" "ps%Ĵ...L ĉ A, Ĵ-H %ĉ%ĉ} ...", B> Ĵ np" : L ...ĉ, ĉL "ps%ĉB ~ĴB"ĴL s->%ĉ, -n N ĉ} AĴ ...ĉ, ĉĴs-n ...L B%ĉL%o} >L%o

$$\lim_n E[L_{m,n}^1()] = m + 1 - \frac{1}{m+2} O(e^{-m})$$

: L Ĵ%ĉ "LBp-ĉĴL%ĉ, } nL-L ĉ> -n NĴ-B, ~ "pL, Ĵ", , A">s- Lĉ>B" Lĉ...L%ĉ~%o N , E LHAĴ%o} L >-> %ĉ%ĉ N H%ĉĉĴĴ, ~, N", , " %o N"pL ...> > %ĉ} %o N"pL Lĉĉ, -L~ > NĴ-B, ~ E psĉp >...L ĉ> s-, Ĵ ĉLĉ>B" Lĉ...L%ĉ~

▪ E[L_{m,n}()] : L, A">s- ...L B%ĉA, Ĵ-H%ĉĴ ĉ ps%ĉĴ>- "Ĵ
$$E[L_{m,n}()] = -1(n) + 1 + \frac{\log m}{\log(-1(n))} -1(n)$$

: L Ĵ%ĉ T" %ĉ} , } L~" } L"p, H", ...ĉ, ĉL "pL Ĵ...L ĉ A, Ĵ-H >-H "LBp-ĉĴL%ĉ, } B Hs-n "pL, Ĵ", ...ĉ, ĉL "pL , E L ĉ A, Ĵ-H

i ZXdcY C V ĉ H Z h j ä

5pL, ĴL

"Nn %ĉ%ĉ} Bĉ~" Ĵ >nL s-"L" } %oNm "pL~
$$E[L_{m,n}()] = -1(n) + 1 + \frac{\log m}{\log(-1(n))} -1(n)$$

E pL ĴL -1(n) %ĉpL s-ĉL ĉ%ĉ, N"pL n>} >NĴ-B, ~ E pL ~ Ĵ%ĉĉLH", x ĉ 1

5pL 7...L ĉ, Ĵ-H

▪ : L, A">s- "pL s-L ĴĴ>sĴ
$$E[L_{m,n}()] = \sum_{K=1}^{\infty} \Pr[L_{m,n}() = K] k + \sum_{K>k} \Pr[L_{m,n}() = K] k + \sum_{K>k} \frac{nm^K}{K!}$$

E pL ĴL "pL >%ĉs-L ĴĴ>sĴ %ĉA">s-LHAĴĴ%ĉn } >y, ĉ%ĉs-L ĴĴ>sĴ, ~ >%ĉp" Ĵ H%ĉL ĴL~" ĉ>-H, } ĉ>sA L

▪ : L "pL ~ ...Ĵn s- k -1(n) + $\frac{2 \log m}{\log -1(n)}$ -1(n)", , A">s- >- Ĵ...L ĉ A, Ĵ-H, N"pL HL%ĉLH N ĉ}

5pL & E L ĉ, Ĵ-H

▪ f, ĉ > TĉLH s-"LnL ĉ k >-H N ĉ 0 j < n/k L" A_j() AL "pL LĉL~" "p>" B ~">s-%o "pL %ĉA%ĉfĴL-BL (jk+1)(jk+2) ĉ ĉ (j+1)k >-H L" p_k = Pr[A_j()] E pL ĴL S_{m,k} %ĉBp, %ĉ- Ĵ-ĉ\ ĉ} Ĵ>" ĉ>-H, } ĴĴ%ĉn "pL s-HL...L-HL-BL, N"pL A_j() E L, A">s- "pL s-L ĴĴ>sĴ
$$\Pr[L_{m,n}()] = 1 - (1 - p_k)^{n/k}$$

▪ 7%ĉn ĉHL>%ĉ, } B Hs-n "pL, Ĵ E L, A">s- "pL s-L ĴĴ>sĴ N ĉ m 2
$$p_k = (m/1.03)^k / (2n - k!)$$

▪ : L ">yL ...> > %ĉ} s- "pL ĉHL~ "Ĵ E[L_{m,n}()] = $\sum_{K=1}^{\infty} \Pr[L_{m,n}() = K]$ >-H "pL >A, ĉL s-L ĴĴ>s L %ĉ, A">s- >, E L ĉ A, Ĵ-H, N"pL HL%ĉLH N ĉ}

9dci Xj Y ĉ\ H Z b Vg h Vc Y E e Zc FgdWZb h

ĉ, ~ĴB"ĴL

f, ĉ > r 1 ĉNn %ĉ%ĉ} Bĉ~" Ĵ >nL s-"L" } %oNm "pL~
$$E[(L_{m,n}^1() - \mu)^2] = c_r m^{r/2} + O(m^{r/2-1}),$$

E pL ĴL μ = E[L_{m,n}¹()] >-H
$$c_r = \begin{cases} < \frac{r!}{2^{r/2}(r/2)!} & r \text{ ĉĉ}, \\ \frac{r!}{3 \cdot 2^{(r-1)/2}((r-3)/2)!} & r \text{ bĉĉ} \end{cases}$$

5p%ĉB" E, ĴHĉ ...Ĵ "p>" (L_{m,n}¹() - μ) / B ~ĉL nL%ĉ H%ĉĉĴĴ, ~, >%ĉ-H>H%ĉLH ~, ĉ} > H%ĉĉĴĴ, ~ E pL ĴL %ĉpL %ĉ-H>HHLĉĉ, ~, NL_{m,n}¹()

ĉ, ~ĴB"ĴL

f, ĉ > r 1 ĉNn %ĉ%ĉ} Bĉ~" Ĵ >nL s-"L" } %oNm "pL~
$$E[L_{m,n}^1()]^r = m^r + \frac{r+1}{2} m^{r-1} + O(m^{r-2})$$

"Ĵ %ĉ>Ĵ">, B, ~%ĉĉL ĉ> %ĉA%ĉfĴL-BL%ĉ- } Ĵ %ĉ "L" } Ĵ">, ~%ĉ-H >%ĉ "pL ĴĴL%o ~

1 ĴL%o ~

f, ĉ S_{m,n} L" E_{m,n}() HL~, "L "pL L-n"p, N>, -nL%o s-B'L>%ĉn %ĉA%ĉfĴL-BL s- : p>" %ĉ[E_{m,n}()] >%ĉ} ..., B", E pL ~ m %ĉĉLH
: pL ~ m = 1 s %ĉL y~, E ~ "p>" E[E_{1,n}()] 2 n %ĉ

HZ[ZgZcXZh

ĉ, ~ĴB"ĴL, ~ĴĴ >-H" } s Ĵp, %ĉ, ~ "pL ĴL" %o N"pL 5Ĵ, ĉ, Ĵ, } s %ĉ%ĉB" LH E sp "pL Lĉĉ, -L~ > NĴ-B, ~ ĉ} L ĉB~" >pL } > B } , ~pĴ /L%ĉ sB ~%ĉ2, ~ Ĵ ĉ>p>} : s, Ĵ ĴL >H 3>} 3.s, ĉ >H NĴL%ĉn E sp ...> > NLHAĴĴy", } A">s, "ĉĉĉ", A">ĴĴ>-H", } ..Ĵ -n ...nL%o s/ 2, ĉ, ~ >-H ĉ-HLE %Ĵ~ ĉ, Ĵ- -n %ĉĴĴL-BL%ĉ sp B } ...L ĉ s-B'L>%ĉn %ĉA%ĉfĴL-BL%ĉ, -nL%ĉ%ĉ} Ĵ} L>- Ĵ} ...nL%o / >- 2, } y 5pL %ĉ...%ĉn } >pL } >B%N, -nL%o s-B'L>%ĉn %ĉA%ĉfĴL-BL%ĉ } A ĉĉL 7-ĉL %Ĵ /L%ĉ